Das Master-Theorem

Jesko Hüttenhain

Spring 2014

Wir einigen uns auf $0 \notin \mathbb{N}$. Wir erinnern zunächst an die Definition einiger Komplexitätsklassen. Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ eine Funktion. Dann definieren wir Klassen $O(f)$ und $o(f)$ von Funktioninen mittels:

$$\begin{aligned} g \in O(f) &:\Leftrightarrow \exists C > 0\ \exists N > 0\ \forall n \geq N\colon g(n) \leq C \cdot f(n) \\ g \in o(f) &:\Leftrightarrow \forall C > 0\ \exists N > 0\ \forall n \geq N\colon g(n) \leq C \cdot f(n) \end{aligned}$$

Es gilt also $g \in O(f)$ wenn f eine asymptotische obere Schranke für g ist und $g \in o(f)$, wenn g gegenüber f asymptotisch vernachlässigbar ist. Mit anderen Worten

$$g \in O(f) \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty, \qquad g \in o(f) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0.$$

Man definiert $\Theta(f) := \{g \in O(f) \mid f \in O(g)\}$, so dass $g \in \Theta(f)$ genau dann, wenn

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \limsup_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty.$$

Insbesondere schlussfolgern wir: Wenn $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)}$ existiert und eine positive Zahl ist, so gilt $g \in \Theta(f)$.

Wenn $\mathscr{C}$ eine Komplexitätsklasse ist, so schreiben wir für eine Funktion $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ auch $h \cdot \mathscr{C} := \{hg \mid g \in \mathscr{C}\}$ sowie $h^{\mathscr{C}} := \{h^g \mid g \in \mathscr{C}\}$. Ähnliche Schreibweisen dieser Form sind in der Literatur ebenfalls verbreitet.

Bemerkung 1. In der Literatur wird häufig $f = \mathscr{C}$ statt $f \in \mathscr{C}$ geschrieben, wenn $\mathscr{C}$ eine Klasse von Funktionen ist. Ich persönlich halte dies für irreführende Notation und werde darauf verzichten. Außerdem ist es geläufig, etwa $O(n^s)$ zu schreiben, wenn eigentlich $O(n \mapsto n^s)$ gemeint ist. ●

Theorem 2 (Master-Theorem). *Sei $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Funktion mit $C := T(1) > 0$. Angenommen, es existieren $a, b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$, so dass für alle $n > 1$ die Gleichung*

$$T(n) = a \cdot T(\delta_b(n)) + f(n) \tag{†}$$

für ein gewisses $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $\delta_b(n) \in \left\{ \left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor \right\}$ gilt.

Mit $e := \log_b(a)$ ist dann

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^e) & ; \quad f \in n^e \cdot o(\frac{1}{\log n}) \\ \Theta(n^e \log(n)) & ; \quad f \in \Theta(n^e) \end{cases}$$

Bemerkung 2.1. Es gibt noch weitere Fälle für das Verhalten von f, für die im Falle der Rekurrenzgleichung (†) die Komplexität von T bekannt ist. Wir verweisen auf die gängige Literatur. ○

Beweis. Wir rechnen nach, dass

$$\begin{aligned} T(n) &= a \cdot T(\delta_b(n)) + f(n) \\ &= a \cdot \Big(a \cdot T(\delta_b^2(n)) + f(\delta_b(n))\Big) + f(n) \\ &= a^2 \cdot T(\delta_b^2(n)) + a^1 \cdot f(\delta_b^1(n)) + a^0 \cdot f(\delta_b^0(n)) \\ &= a^2 \cdot (a \cdot T(\delta_b^3(n)) + f(\delta_b^2(n))) + a^1 \cdot f(\delta_b^1(n)) + a^0 \cdot f(\delta_b^0(n)) \\ &= a^3 \cdot T(\delta_b^3(n)) + a^2 \cdot f(\delta_b^2(n)) + a^1 \cdot f(\delta_b^1(n)) + a^0 \cdot f(\delta_b^0(n)) \\ &\dots \\ T(n) &= a^{\ell(n)} \cdot T(1) + \sum_{k=0}^{\ell(n)-1} a^k \cdot f(\delta_b^k(n)) \end{aligned}$$

mit $\ell \in \Theta(\log_b(n))$, genauer sogar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ell(n)}{\log_b(n)} = 1$.

Wenn nun $f \in \Theta(n^e)$ gilt, so ist daher

$$\begin{aligned}
\Theta(T) &= \Theta\left(a^{\ell(n)}C + \sum_{k=0}^{\ell(n)-1} a^k \cdot f(\delta_b^k(n))\right) \\
&= \Theta\left(a^{\log_b(n)}C + \sum_{k=0}^{\log_b(n)-1} a^k \cdot \left(\frac{n}{b^k}\right)^{\log_b(a)}\right) \\
&= \Theta\left(n^{\log_b(a)}C + \sum_{k=0}^{\log_b(n)-1} n^{\log_b(a)}\right) \\
&= \Theta\left(n^{\log_b(a)} \cdot (C + \log_b(n))\right) = \Theta(n^e \cdot \log(n)).
\end{aligned}$$

Wenn andererseits $f \in n^e \cdot o(\frac{1}{\ell(n)})$ ist, so gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{n^e} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\ell(n)}C + \sum_{k=0}^{\ell(n)-1} a^k f(\delta_b^k(n))}{n^e} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\ell(n)}}{n^e}C + \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{\ell(n)-1} a^k f(\delta_b^k(n))}{n^e} \\
&= C + \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{\ell(n)-1} a^k \cdot (nb^{-k})^{\log_b(a)} \cdot o(\frac{1}{\ell(n)})}{n^e} \\
&= C + \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{\ell(n)-1} n^e \cdot o(\frac{1}{\ell(n)})}{n^e} = C + \lim_{n\to\infty} \ell(n) \cdot o(\tfrac{1}{\ell(n)}) = C,
\end{aligned}$$

was $T \in \Theta(n^e)$ bedeutet. ∎

Korollar 3. *Wenn es ein $c \in \mathbb{N}$ gibt, so dass T eine Rekurrenzgleichung der Form (†) mit $f \equiv c$ konstant erfüllt, so ist*

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^e) & ; \quad a > 1 \\ \Theta(\log(n)) & ; \quad a = 1 \end{cases}$$

Beweis. Für $a > 1$ ist $e = \log_b(a) > 0$ und somit $cn^{-e} \in o(\frac{1}{\log n})$. Also ist $f = c = n^e \cdot (cn^{-e}) \in n^e \cdot o(\frac{1}{\log n})$. Für $a = 1$ ist $\log_b(a) = 0$ und somit $f \in \Theta(n^0) = \Theta(n^e)$. ∎